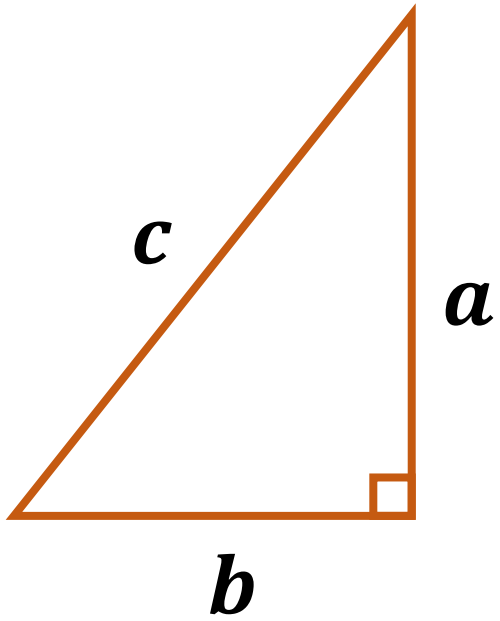


# فصل ۲

## عدد های حقیقی

هر عدد حقیقی نقطه ای متناظر روی محور اعداد دارد. برعکس هر نقطه روی محور اعداد متناظر با عددی حقیقی است.

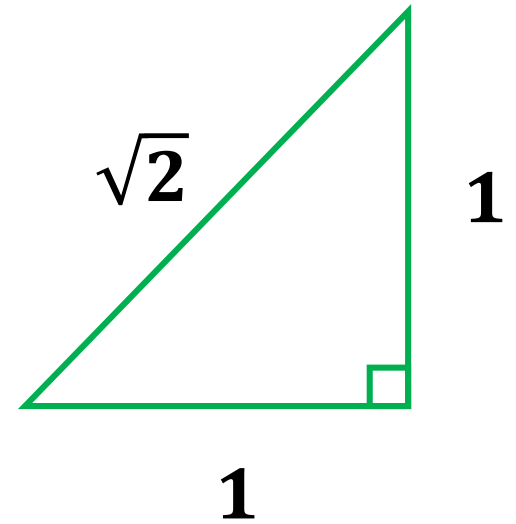
روی محور اعداد حقیقی بین هر دو عدد بی شمار عدد گنگ و گویا وجود دارد.



$$a^2 + b^2 = c^2$$

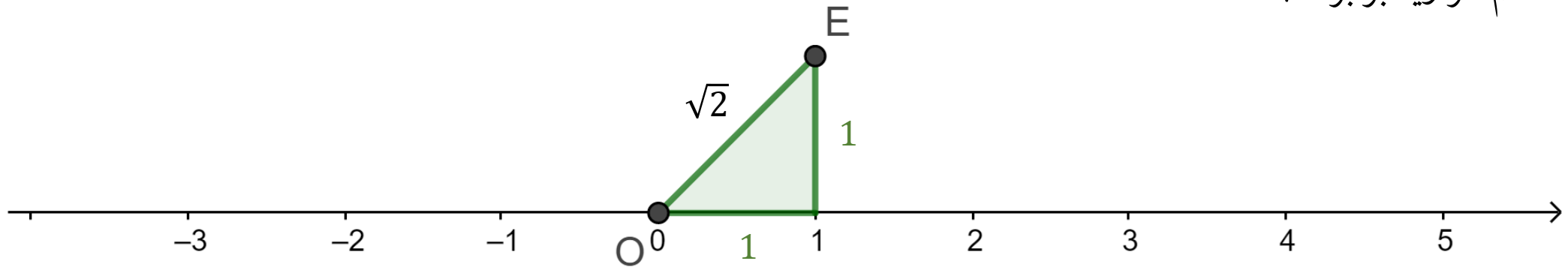
قضیه فیثاغورس:

$$1^2 + 1^2 = 2 \implies c^2 = 2 \implies c = \sqrt{2}$$



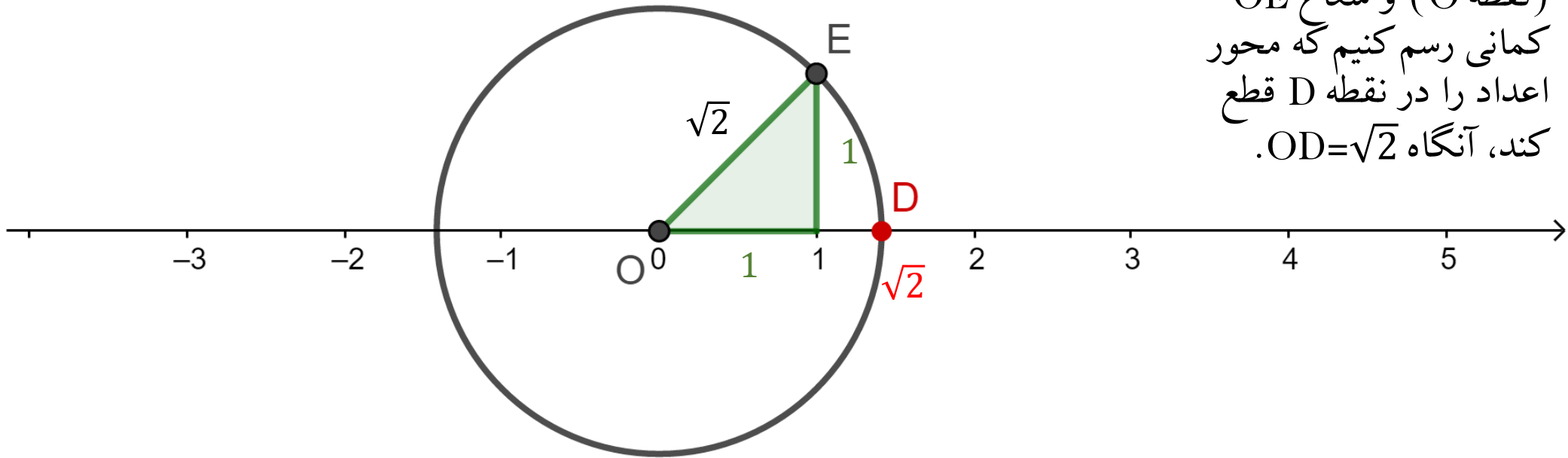
# نمایش هندسی $\sqrt{2}$ روی محور اعداد حقیقی

در شکل مقابل طول وتر مثلث قائم الزاویه برابر  $\sqrt{2}$  است.



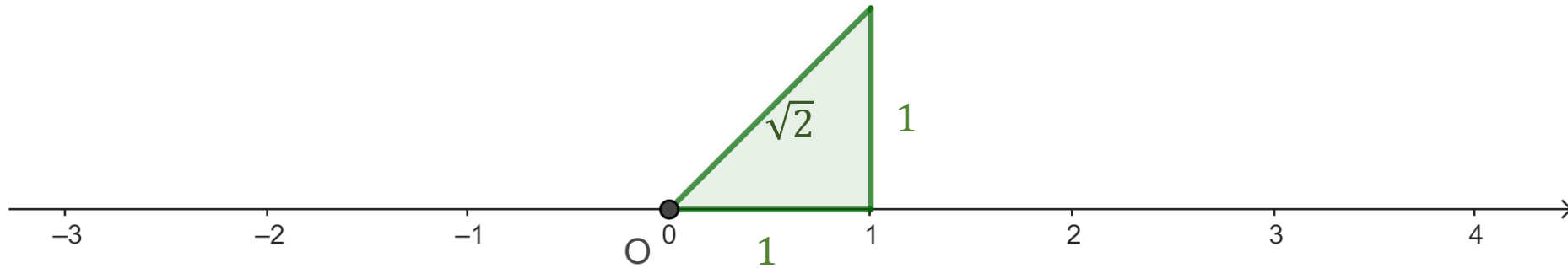
# نمایش هندسی $\sqrt{2}$ روی محور اعداد حقیقی

بنابراین اگر به مرکز مبدأ  
(نقطه O) و شعاع OE  
کمانی رسم کنیم که محور  
اعداد را در نقطه D قطع  
کند، آنگاه  $OD = \sqrt{2}$ .



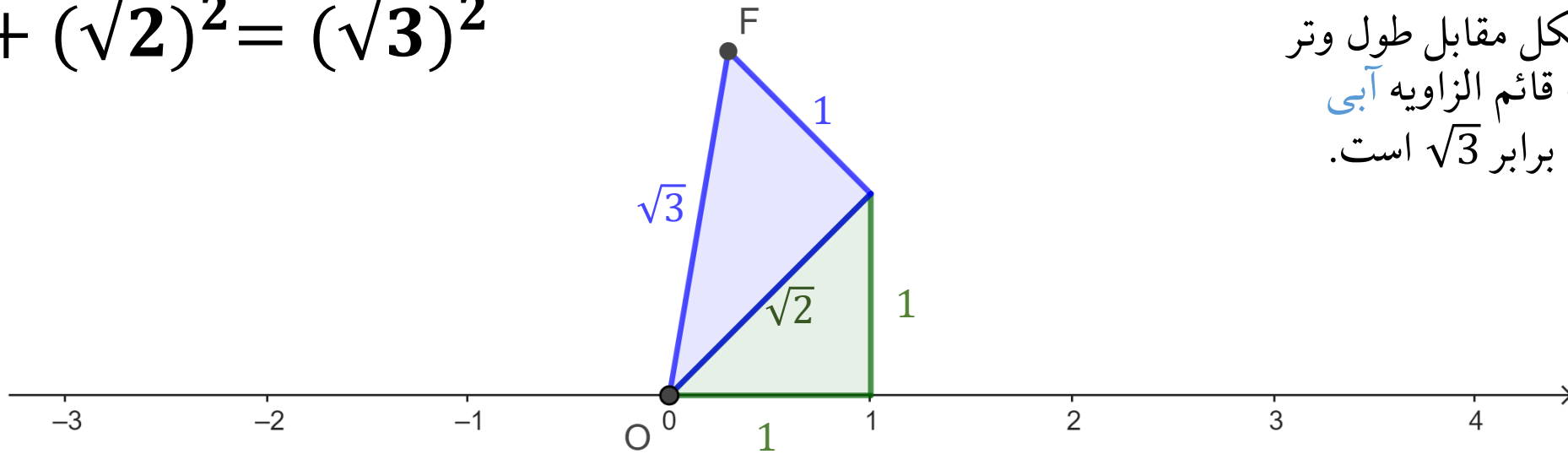
نمایش هندسی  $\sqrt{3}$  روی محور اعداد حقیقی

$$1^2 + (\sqrt{2})^2 = (\sqrt{3})^2$$



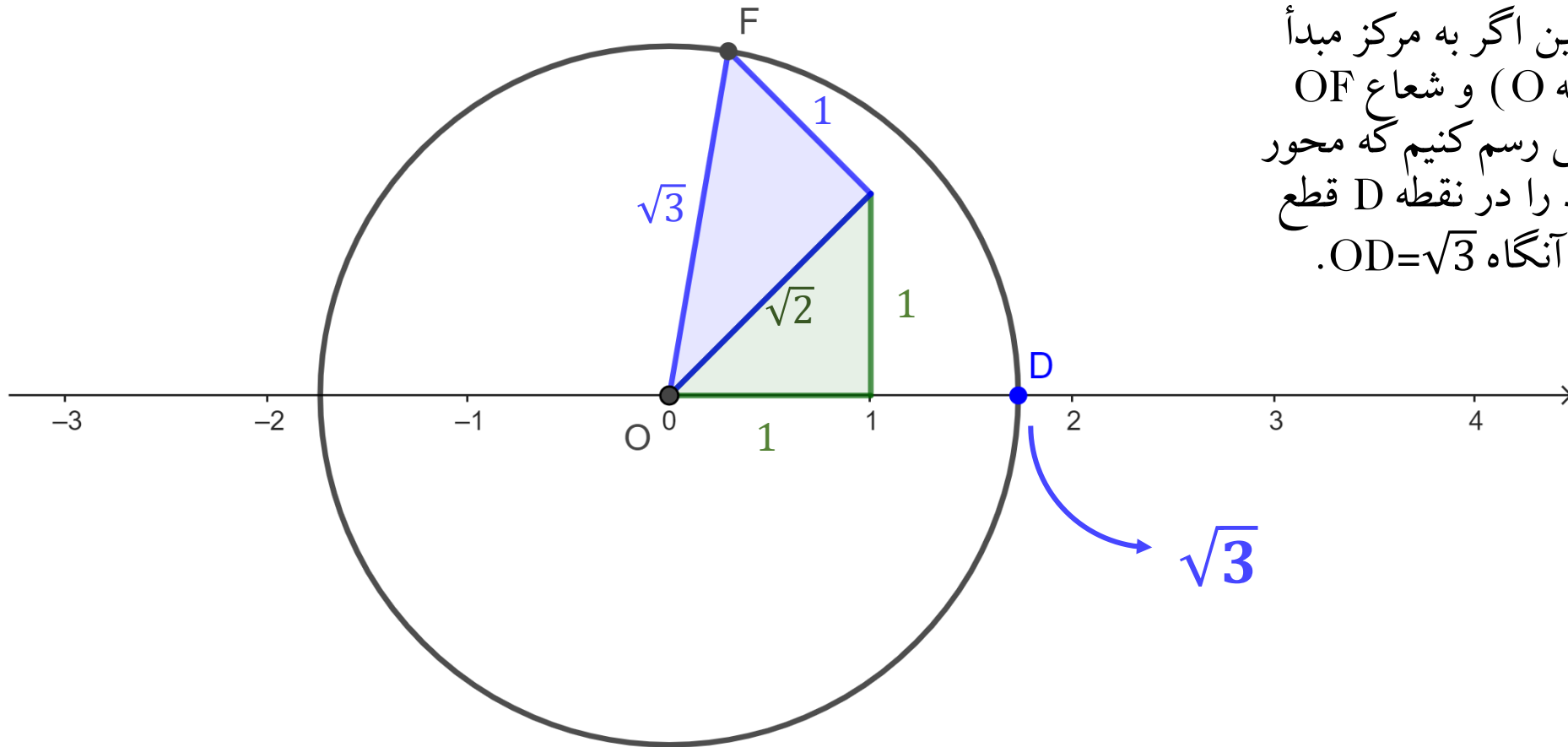
# نمایش هندسی $\sqrt{3}$ روی محور اعداد حقیقی

$$1^2 + (\sqrt{2})^2 = (\sqrt{3})^2$$



در شکل مقابل طول وتر  
مثلث قائم الزاویه آبی  
رنگ برابر  $\sqrt{3}$  است.

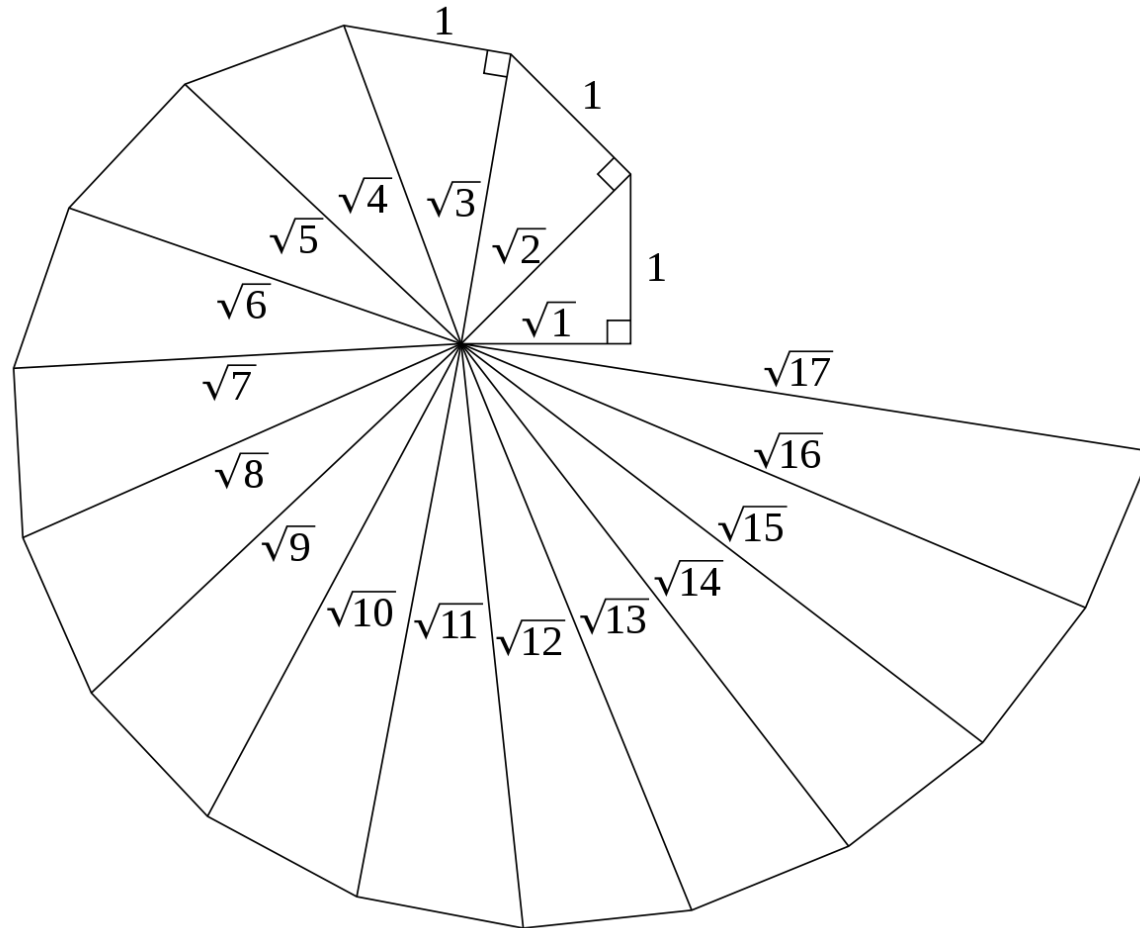
# نمایش هندسی $\sqrt{3}$ روی محور اعداد حقیقی



بنابراین اگر به مرکز مبدأ  
(نقطه  $O$ ) و شعاع  $OF$   
کمانی رسم کنیم که محور  
اعداد را در نقطه  $D$  قطع  
کند، آنگاه  $OD = \sqrt{3}$ .



# نمودار حلزونی



عدد  $\sqrt{15}$  بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

ابتدا دو مربع کامل پیدا می کنیم که ۱۵ بین آنهاست.

$$9 < 15 < 16 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{9} < \sqrt{15} < \sqrt{16} \quad \Rightarrow \quad 3 < \sqrt{15} < 4$$

بنابراین  $\sqrt{15}$  بین دو عدد صحیح متوالی ۳ و ۴ است.

عدد  $2 + \sqrt{17}$  بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

$$16 < 17 < 25 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{16} < \sqrt{17} < \sqrt{25} \quad \Rightarrow \quad 4 < \sqrt{17} < 5$$

حال به طرف های این نابرابری ها عدد ۲ را اضافه می کنیم:

$$2 + 4 < 2 + \sqrt{17} < 2 + 5 \quad \Rightarrow \quad 6 < 2 + \sqrt{17} < 7$$

بنابراین  $2 + \sqrt{17}$  بین دو عدد صحیح متوالی ۶ و ۷ قرار دارد.

عدد  $1 - \sqrt{7}$  بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

$$4 < 7 < 9 \Rightarrow \sqrt{4} < \sqrt{7} < \sqrt{9} \Rightarrow 2 < \sqrt{7} < 3$$

نابرابری را در  $-1$  ضرب می کنیم (توجه کنید که در این صورت جهت نابرابری ها عوض می شود)

$$-3 < -\sqrt{7} < -2 \Rightarrow -3 + 1 < -\sqrt{7} + 1 < -2 + 1$$

$$\Rightarrow -2 < 1 - \sqrt{7} < -1$$

بنابراین  $1 - \sqrt{7}$  بین دو عدد صحیح متوالی  $-2$  و  $-1$  قرار دارد.

پیدا کردن عدد گنگ بین دو عدد حقیقی

چهار عدد گنگ بین ۲ و ۳ بنویسید.

توجه کنید که  $2^2 < 5 < 6 < 7 < 8 < 3^2$  بنابراین داریم:

$$2 < \sqrt{5} < \sqrt{6} < \sqrt{7} < \sqrt{8} < 3$$

در نتیجه عدد های گنگ  $\sqrt{5}$ ،  $\sqrt{6}$ ،  $\sqrt{7}$ ،  $\sqrt{8}$  بین ۲ و ۳ هستند.

هفت عدد گنگ بین ۱ و ۲ بنویسید.

$$1 < 1.2 < 2 < 2.1 < 2.5 < 3 < 3.4 < 3.9 < 2^2$$

در نتیجه

$$1 < \sqrt{1.2} < \sqrt{2} < \sqrt{2.1} < \sqrt{2.5} < \sqrt{3} < \sqrt{3.4} < \sqrt{3.9} < 2$$

پنج عدد گنگ بین  $\sqrt{7}$  و  $\sqrt{10}$  مشخص کنید.

$$7 < 7.5 < 8 < 8.3 < 9.4 < 9.7 < 10$$

در نتیجه

$$\sqrt{7} < \sqrt{7.5} < \sqrt{8} < \sqrt{8.3} < \sqrt{9.4} < \sqrt{9.7} < \sqrt{10}$$



بین 2 و  $\sqrt{5}$  چهار عدد گویا و چهار عدد گنگ مشخص کنید.

می دانیم  $\sqrt{5} \simeq 2.23$

چهار عدد گویا:  $2 < 2.06 < 2.19 < 2.2 < 2.207 < \sqrt{5}$

چهار عدد گنگ:  $4 < 4.1 < 4.25 < 4.3 < 4.8 < 5 \implies$

$2 < \sqrt{4.1} < \sqrt{4.25} < \sqrt{4.3} < \sqrt{4.8} < \sqrt{5}$

سه عدد گنگ بین 3.1 و 3.2 بنویسید.

توجه کنید که  $(3.1)^2 = 9.61$  و  $(3.2)^2 = 10.24$  از طرف دیگر،

$$(3.1)^2 < 9.62 < 9.63 < 9.64 < (3.2)^2$$

پس

$$3.1 < \sqrt{9.62} < \sqrt{9.63} < \sqrt{9.64} < 3.2$$

بنابراین عدد های گنگ  $\sqrt{9.62}$  و  $\sqrt{9.63}$  و  $\sqrt{9.64}$  بین 3.1 و 3.2 هستند.

گزاره: مجموع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است

اثبات: فرض کنید  $r$  عددی گنگ و  $q$  عددی گویا باشد. ثابت می کنیم  $r + q$  عددی گنگ است. فرض کنید چنین نباشد و  $r + q$  عددی گویا باشد. از آنجا که  $q$  عددی گویاست،  $-q$  نیز گویا است. می دانیم مجموع دو عدد گویا، عددی گویاست، بنابراین  $(r + q) + (-q)$  نیز گویاست، که یعنی  $r$  گویاست. ولی این با فرض ما ( $r$  عددی گنگ است) در تناقض است، بنابراین  $r + q$  عددی گنگ است.

## تمرین امتیازی: گزاره های زیر را اثبات کنید.

- مجموع و حاصل ضرب دو عدد گویا، عددی گویاست.
- مجموع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است (قبلا به عنوان نمونه ثابت شده).
- حاصل ضرب عدد گویا نا صفر در هر عدد گنگ، عددی گنگ است (راهنمایی: برهان خلف).
- معکوس هر عدد گنگ، عددی گنگ است (راهنمایی: برهان خلف).
- قرینه هر عدد گنگ، عددی گنگ است (راهنمایی: برهان خلف).

تکلیف: برای هر یک از عبارات های زیر **مثال نقض** بیاورید.

• حاصل جمع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است.

• حاصل ضرب هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است.

# تکلیف از کتاب وزارتتی:

- کار در کلاس و فعالیت ص ۲۴
- کار در کلاس های ص ۲۵
- تمرین ص ۲۷ سوال های ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷